ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Dans l'ensemble du problème, on désigne par :

$\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels;

$\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs;

$\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers rationnels.

PREMIÈRE PARTIE

1° On considère la suite de fonctions numériques P_n de la variable réelle x définie par les relations :

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = n\,P_{n-1}(x) \qquad n > 1$$

$$P_n(0) = P_n(1) \qquad n > 1$$

a. Montrer que les relations précédentes définissent une suite unique de polynômes P_n de degré n.

b. Calculer $P_2(x)$ et $P_3(x)$.

c. Quelle relation existe-t-il entre $P_n(x)$ et $(-1)^n P_n(1-x)$? En déduire alors les valeurs de $P_{2m+1}(0)$ et $P_{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

2° Dans toute la suite du problème, on désigne par B_n le nombre réel :

$$B_n = P_n(0) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

a. Montrer que :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, B_k\, x^{n-k} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

b. En déduire que :

$$B_{2m} = \sum_{k=0}^{2m-1}{}' \alpha_k\, B_k \qquad (m \in \mathbb{N}^*) \qquad \text{où} \qquad \alpha_k\,(k = 0, 1, \ldots, 2m-1)$$

désignent des constantes que l'on précisera.

c. Calculer B_4 et B_6.

3° Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ fixé. On considère la série de fonctions $u_k(x, n)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ définie par la relation :

$$u_k(x, n) = -n! \left[\frac{e^{2k\pi ix}}{(2k\pi i)^n} + \frac{e^{-2k\pi ix}}{(-2k\pi i)^n} \right] \qquad \text{avec } i^2 = -1$$

On pose :

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x, n)$$

a. Montrer que $u_k(x, n)$ est une série de fonction réelle, périodique de la variable réelle x qui converge normalement pour tout $n > 1$.

b. Soit m un élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose $x \neq p$ $(p \in \mathbb{Z})$.

Établir la relation :

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{m} \cos 2k\pi x = \frac{\sin (2m+1)\pi x}{\sin \pi x}$$

Montrer alors que :

$$x - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin 2k\pi x}{k\pi} = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{\sin (2m+1)\pi t}{\sin \pi t}\, dt$$

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \delta \leqslant \frac{1}{2}$ et tout x tel que : $q + \delta \leqslant x \leqslant q + 1 - \delta$ $(q \in \mathbb{Z})$ on a :

$$\left| x - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin 2k\pi x}{k\pi} \right| < \frac{2}{\pi (2m+1)} \cdot \frac{1}{\sin \pi \delta}$$

En déduire que Φ_1 converge uniformément pour $\forall\, x \neq p$ $(p \in \mathbb{Z})$ et coïncide avec P_1 lorsque $\varepsilon \leqslant x \leqslant 1 - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$.

c. Montrer que Φ_2 coïncide avec P_2 sur $[0, 1]$.

En déduire que, pour tout $n > 2$, Φ_n coïncide aussi avec P_n sur $[0, 1]$.

d. On pose :

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Montrer que S_{2n} converge et que :

$$S_{2n} - 1 \leqslant \frac{1}{2n-1}$$

Après avoir établi une relation entre B_{2n} et S_{2n}, démontrer que :

$$|B_{2n}| \leqslant 4 \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}$$

e. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

* $\qquad |P_{2n}(x)| \leqslant |B_{2n}|$

** $\qquad |P_{2n+1}(x)| \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right) |B_{2n}|$

. . .

Deuxième partie

On désigne par $C^{2n+1}[a, b]$ l'ensemble des fonctions continues admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre $2n+1$ sur l'intervalle $[a, b]$. On désigne de façon générale par $f^{(p)}$ la dérivée p^{ieme} de f.

Soit f un élément de $C^{2n+1}[0, 1]$ et soit I_{2n} l'intégrale définie par :

$$I_{2n} = \int_0^1 P_{2n}(x) f^{(2n)}(x)\, dx \qquad \text{si} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

$$I_0 = \int_0^1 f(x)\, dx \qquad \text{si} \qquad n = 0$$

1° *a.* Établir une relation entre I_{2n} et I_{2n-2} $(n \in \mathbb{N}^*)$.

b. En déduire l'expression de I_{2n} en fonction de I_0.

2° Montrer la relation :

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \sum_{p=1}^{n} \frac{B_{2p}}{(2p)!} [f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0)] + E_n$$

avec :

$$E_n = -\frac{1}{(2n+1)!} \int_0^1 P_{2n+1}(t) f^{(2n+1)}(t)\, dt$$

3° Soit f un élément de $C^{2n+1}[a, b]$.

a. Montrer que :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{2} [f(b) + f(a)] - \sum_{p=1}^{n} (b-a)^{2p} \frac{B_{2p}}{(2p)!} [f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)] + R_n(a, b)$$

avec :

$$R_n(a, b) = -\frac{(b-a)^{2n+2}}{(2n+1)!} \int_0^1 P_{2n+1}(t) f^{(2n+1)}[a + (b-a)t]\, dt$$

b. Soient m et q deux entiers tels que $0 \leqslant m < q$ et f un élément de $C^{2n+1}[m, q]$.

Établir la relation :

$$\sum_{i=m}^{q} f(i) = \int_m^q f(x)\, dx + \frac{1}{2} [f(m) + f(q)] + \sum_{p=1}^{n} \frac{B_{2p}}{(2p)!} [f^{(2p-1)}(q) - f^{(2p-1)}(m)] + Q_n(m, q)$$

où :

$$Q_n(m, q) = \frac{1}{(2n+1)!} \int_m^q \Phi_{2n+1}(t) f^{(2n+1)}(t)\, dt$$

Montrer alors que :

$$\left| Q_n(m, q) \right| \leqslant \frac{2}{(2\pi)^{2n}} \int_m^q \left| f^{(2n+1)}(t) \right| dt$$

Troisième partie

Soit $\sum_m$ la suite définie par la relation :

$$\sum_m = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} - \ln m \qquad m \in \mathbb{N}^*$$

1° Montrer que $\sum_m$ est une suite positive, décroissante qui converge vers une limite que l'on note γ lorsque $m \to + \infty$.

2° On pose :

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} - \ln m + r_m$$

a. Montrer que :

$$\lim_{m \to + \infty} m\, r_m = -\frac{1}{2}$$

b. Quel est l'ordre de grandeur de l'erreur commise sur le calcul de la constante γ lorsque cette dernière est approximée par $\sum_m$ avec $m = 5 \times 10^4$?

3° Soient m et q deux entiers tels que $1 \leqslant m < q$.

Montrer alors que :

$$\sum_m = \sum_q - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2m} + \sum_{p=1}^{n} \frac{B_{2p}}{2p}\left[\frac{1}{q^{2p}} - \frac{1}{m^{2p}}\right] + T_n(m, q)$$

Expliciter $T_n(m, q)$.

Lorsque m et n sont fixés, montrer que $T_n(m, q)$ admet une limite que l'on note $T_n(m)$ lorsque $q \to + \infty$.

En déduire l'égalité :

$$\gamma = \sum_m - \frac{1}{2m} + \sum_{p=1}^{n} \frac{B_{2p}}{2p} \cdot \frac{1}{m^{2p}} - T_n$$

Montrer que $|T_n|$ admet une borne supérieure que l'on exprimera en fonction de m, n et B_{2n}.

Application numérique.

Soit $n = 3$. Calculer une valeur approchée γ^* de γ avec une précision telle que :

$$|\gamma^* - \gamma| \leqslant 10^{-8}.$$

N.B. — *Les candidats pourront traiter cette dernière partie en admettant les résultats de la seconde.*